



TITLE:

ループソリトンの近距離相互作用 (非線形波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

角畠, 浩; 小林, 泰之

CITATION:

角畠, 浩 ...[et al]. ループソリトンの近距離相互作用 (非線形波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2019, 2128: 113-123

ISSUE DATE:

2019-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/252276>

RIGHT:

ループソリトンの近距離相互作用

富山大・工 角 浩, 富山大院 小林 泰之

Hiroshi Kakuhata and Yasuyuki Kobayashi

Faculty of Engineering, University of Toyama

1 はじめに

外部磁場中の内部電流を持つストリングの運動を記述する連立非分散方程式 [1, 2]

$$\partial_\tau^2 \mathbf{r} - \partial_\sigma^2 \mathbf{r} = (\partial_\tau \mathbf{r} + \partial_\sigma \mathbf{r}) \times (\mathbf{J} \times \mathbf{r}) \quad (1)$$

のソリトン解は双方向に進行するループソリトンである。ここで、 $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$ はストリングの位置ベクトル、 \mathbf{J} は一定の外部電流ベクトル、 τ は時間、 σ はストリングに沿う弧長に対応するパラメータである。本稿では、 $\mathbf{J} = (0, 0, 1)$ としてソリトンを X - Z 平面に限った場合、すなわち、 Y -成分が 0 の場合を考察する。このとき連立非分散方程式は二成分 Klein-Gordon 型の

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)X, \\ \partial_\tau^2 Z - \partial_\sigma^2 Z &= (\partial_\tau X + \partial_\sigma X)X, \end{aligned} \quad (2)$$

で与えられる。

この方程式の 2 ソリトン相互作用を従来、以下の三つのパターン

1. 正と正の振幅の場合、遅い速度での衝突ではループがオーバーラップせずに弾くように相互作用する。
2. 正と正の振幅の場合、速い速度での衝突はループがオーバーラップし、大きなループの中を小さなループが回る。
3. 正と負の振幅での相互作用では小さなループが一時的に消失し大きなループがさらに大きくなる。

で分類してきた (図 1)。本稿では、近距離でのソリトン相互作用を成分ごとに詳細に調べることにより、上記の 1. と 2. のパターンが実は同一の弾く相互作用で、速度が大きくなるとループが解消し、ソリトンのオーバーラップはさらに大きな速度で発生することを示す。なお、3. のパターンは本稿で用いる方法では扱うことができない。

2 ソリトン解

方程式 (2) に対して、双線形変換

$$\begin{aligned} X &= \frac{G}{F}, \\ Z &= \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \ln F, \end{aligned} \quad (3)$$

を行えば、双線形方程式

$$\begin{aligned} (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot G &= 0, \\ (D_\tau - D_\sigma)^2 F \cdot F - \frac{1}{2}G^2 &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

を得る。これから 1 ソリトン解は

$$G = e^\eta, \quad F = 1 + A_1 e^{2\eta}, \quad (5)$$

ここで位相、係数および分散関係はそれぞれ

$$\begin{aligned} \eta &= \omega\tau + p\sigma + \delta, \\ A_1 &= \frac{1}{16(\omega - p)^2}, \\ \omega^2 - p^2 &= -1, \end{aligned}$$

である。位相速度を v とし、 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, $\omega = \gamma v$, $p = \gamma$, $A = 2\gamma(1+v)$ とすれば 1 ソリトン解は実空間において

$$\begin{aligned} X &= A \operatorname{sech} \gamma(\sigma - v\tau), \\ Z &= Z_0 + \sigma - A \tanh \gamma(\sigma - v\tau), \end{aligned}$$

となるので、 Z は \tanh のキンク型である。2 ソリトン解は

$$\begin{aligned} G &= e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + B_1 e^{2\eta_1 + \eta_2} + B_2 e^{\eta_1 + 2\eta_2}, \\ F &= 1 + A_1 e^{2\eta_1} + A_2 e^{2\eta_2} + A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2} + C_{12} e^{2\eta_1 + 2\eta_2}, \end{aligned}$$

で与えられる。ここで係数は

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{16(\omega_n - p_n)^2} \quad (n = 1, 2), \\ A_{12} &= \frac{1}{2(\omega_1 + \omega_2 - p_1 - p_2)^2}, \\ B_n &= -\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2 - (p_1 - p_2)^2}{(\omega_1 + \omega_2)^2 - (p_1 + p_2)^2} A_n \quad (n = 1, 2), \\ C_{12} &= \left[\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2 - (p_1 - p_2)^2}{(\omega_1 + \omega_2)^2 - (p_1 + p_2)^2} \right]^2 A_1 A_2, \end{aligned}$$

である。以下、それぞれのソリトンが位相速度 v ($0 < v < 1$) と $-v$ で正の振幅を持つソリトンが同一平面内で正面衝突する場合のみを考察する。このとき厳密な 2 ソリトン解は、

$$\begin{aligned} F &= \cosh 2\gamma v\tau + (1 - v^2) + v^2 \cosh 2\gamma\sigma, \\ G &= \gamma v[(1 - v) \cosh \gamma(\sigma - v\tau) + (1 + v) \cosh \gamma(\sigma + v\tau)], \end{aligned} \quad (6)$$

で与えられる。図1の中央の図では大きなループソリトンの中を小さなループソリトンが回っているように見える。

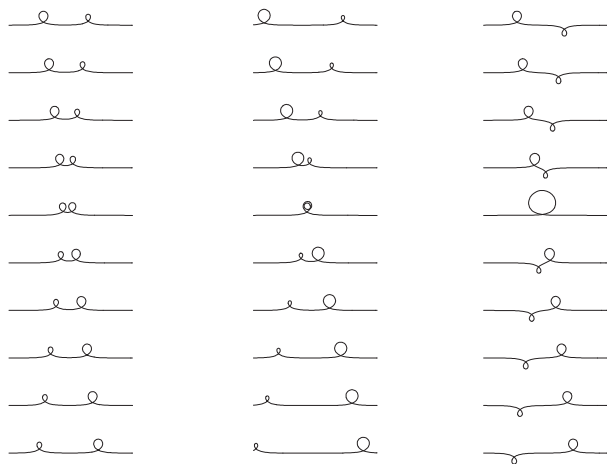


図1 $v = 0.12,$ $v = 0.24,$ $v = 0.12$

3 ソリトンのピーク

この節ではソリトンのいる場所をそのピークと考慮して、(4)と(6)からソリトンのピークの位置を求める。同じスピード v でのソリトンの正面衝突のとき X と Z の二つのソリトンのピークを求める方程式、 $\partial_\sigma X = 0$, $(\partial_\sigma^2 X < 0)$ と $\partial_\sigma^2 Z = 0$, $(\partial_\sigma^3 Z > 0)$ は、それぞれ $e^{2\gamma\sigma}$ の3次方程式と4次方程式になる。これらの方程式の解は複雑で取り扱いが困難なため $\tau = 0$ の場合を考える。

以下では上記の正面衝突のときの $\tau < 0$ で右に向かうソリトンと左に向かうソリトンの位置をそれぞれ σ_1 と σ_2 とし、変数として

$$x = e^{2\gamma v\tau}, y_I = e^{2\gamma\sigma_I}, (I = X, Z), \quad (7)$$

を用いる。このとき、 X に対しては $\partial_\sigma X = 0$ から3次方程式

$$f_X(x, y_X) = b_{X3}y_X^3 + b_{X2}y_X^2 + b_{X1}y_X + b_{X0} = 0, \quad (8)$$

Z に対しては $\partial_\sigma^2 Z = 0$ から4次方程式

$$f_Z(x, y_Z) = b_{Z4}y_Z^4 + b_{Z3}y_Z^3 + b_{Z2}y_Z^2 + b_{Z1}y_Z + b_{Z0} = 0, \quad (9)$$

を得る。ここで y の各べき乗の係数は、それぞれ、

$$\begin{aligned} b_{X3} &= -v^2 [(1+v)x^2 + (1-v)x], \\ b_{X2} &= (1+v)x^3 + (1-v)(3+4v-v^2)x^2 + (1+v)(3-4v-v^2)x + 1-v, \\ b_{X1} &= -(1-v)x^3 - (1+v)(3-4v-v^2)x^2 - (1-v)(3+4v-v^2)x - 1-v, \\ b_{X0} &= v^2 [(1-v)x^2 + (1+v)x], \end{aligned} \quad (10)$$

および

$$\begin{aligned}
 b_{Z4} &= v^2 x [(1+v)x^2 + 2(1-v^2)x + 1-v], \\
 b_{Z3} &= -\left\{ (1+v)x^4 + 2(2+v)(1-v^2)x^3 \right. \\
 &\quad \left. + 2[1-4v^4 + 2(1-v^2)^2]x^2 + 2(2-v)(1-v^2)x + 1-v \right\}, \\
 b_{Z2} &= -6v^3 x(x^2-1), \\
 b_{Z1} &= (1-v)x^4 + 2(2-v)(1-v^2)x^3 \\
 &\quad + 2[1-4v^4 + 2(1-v^2)^2]x^2 + 2(2+v)(1-v^2)x + 1+v, \\
 b_{Z0} &= -v^2 x [(1-v)x^2 + 2(1-v^2)x + 1+v],
 \end{aligned} \tag{11}$$

で与えられる。 $\tau = 0$ ($x = 1$) のとき、これらの係数は関係式

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^3 b_{Xn} &= 0, \\
 \sum_{n=0}^4 b_{Zn} &= 0,
 \end{aligned} \tag{12}$$

を満足するので、それぞれ、 $y_X = 1$ と $y_Z = \pm 1$ が方程式 (8) と (9) の $\tau = 0$ の解であることを示している。このため、 $\tau = 0$ ($x = 1$) のとき、高次方程式 $f_I = 0$ は 2 次方程式

$$\begin{aligned}
 v^2 y_X^2 - 2(2-3v^2)y_X + v^2 &= 0 \\
 v^2(2-v^2)y_Z^2 - 2(4-4v^2-v^4)y_Z + v^2(2-v^2) &= 0,
 \end{aligned} \tag{13}$$

に縮小し、その解は

$$\begin{aligned}
 y_{X\pm} &= \frac{2-3v^2 \pm 2\sqrt{(1-v^2)(1-2v^2)}}{v^2}, \\
 y_{Z\pm} &= \frac{4-4v^2-v^4 \pm 2\sqrt{(1-v^2)(2+v^2)(2-3v^2)}}{v^2(2-v^2)},
 \end{aligned} \tag{14}$$

となるので、 $\tau = 0$ ($x = 1$) のとき、 X のピークの位置と Z のピークの位置は異なることがわかる。2 次方程式 (13) が二つの実数解を持つためには $D_X = (1-v^2)(1-2v^2) > 0$, $D_Z = (1-v^2)(2+v^2)(2-3v^2) > 0$ でなければならないず、その値は異なる。

$$\begin{aligned}
 0 < v < \frac{1}{\sqrt{2}} &\approx 0.70710, \\
 0 < v < \sqrt{\frac{2}{3}} &\approx 0.81649.
 \end{aligned} \tag{15}$$

このとき、 X のピーク ($y_{X-} = y_{X1}$, $y_{X+} = y_{X2}$) は $v \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.70710$ で、 Z のピーク ($y_{Z-} = y_{Z1}$, $y_{Z+} = y_{Z2}$) は $v \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.81649$ で二つのピークが重なり、ソリトンはオーバー

ラップする。パラメータ σ 上のソリトンのピークの位置は X と Z に対して、それぞれ

$$\begin{aligned}\sigma_{X1} &= \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{2-3v^2-2\sqrt{(1-v^2)(1-2v^2)}}{v^2}, \\ \sigma_{X2} &= \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{2-3v^2+2\sqrt{(1-v^2)(1-2v^2)}}{v^2}, \\ \sigma_{Z1} &= \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{4-4v^2-v^4-2\sqrt{(1-v^2)(2+v^2)(2-3v^2)}}{v^2(2-v^2)}, \\ \sigma_{Z2} &= \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{4-4v^2-v^4+2\sqrt{(1-v^2)(2+v^2)(2-3v^2)}}{v^2(2-v^2)},\end{aligned}\tag{16}$$

で与えられる。 $\sigma_{I1} + \sigma_{I2} = 0$ なので、 $\tau = 0$ で $\sigma = 0$ の左右に対称にピークが存在し、 $y_I = 1$ ($\sigma = 0$) がソリトンとソリトンの間の谷間であることがわかる。

4 $\tau = 0$ でのピークの数

ソリトンの各成分 X と Z の相互作用中のピークの数を求める。しかし、方程式 (8) や (9) の一般解からソリトンの数を求めるのは困難である。 $f_X(x, y_X) = 0$ と $f_X(x, y_Z) = 0$ を陰関数と見なして、陰関数定理により速度

$$\frac{d\sigma_I}{d\tau} = -v \frac{x}{y_I} \frac{\partial_x f_I(x, y_I)}{\partial_y f_I(x, y_I)}, \quad (I = X, Z)\tag{17}$$

を求めることができる。任意の x でのピークの導関数（速度）を求めると複雑な表式となるが、 $x = 1$ での y_{I1} と y_{I2} ($I = X, Z$) での表式は簡単なものになる。 $\tau = 0$ では、 X のピークの速度は σ_{X1} と σ_{X2} は大きさが同じで、正の方向を向き

$$\frac{d\sigma_X}{d\tau} = \frac{v^4}{1-2v^2}\tag{18}$$

になり、 Z のピークの数 σ_{Z1} と σ_{Z2} も同様で

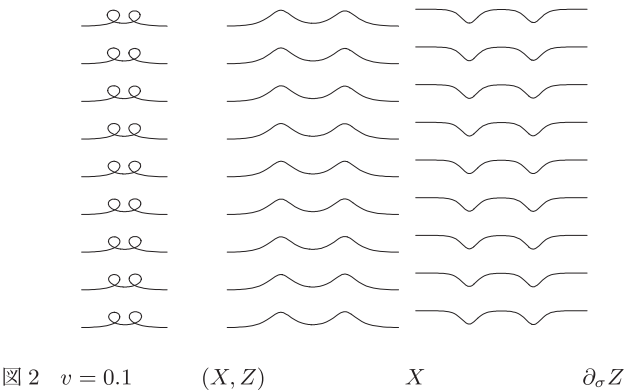
$$\frac{d\sigma_Z}{d\tau} = \frac{v^6}{(4-v^4)(2-3v^2)}\tag{19}$$

になって、それぞれの相対速度が 0 になる。これはソリトンが $\tau = 0$ がソリトンが衝突して弾く瞬間であることを意味する。

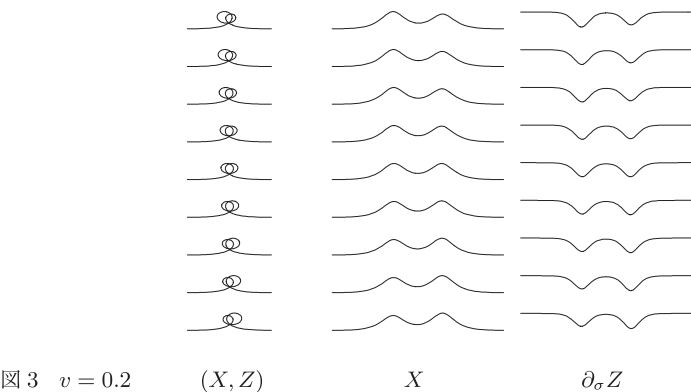
5 Soliton interaction at short distance

前節での結果を考慮して、本節では $\tau = 0$ 付近での $v = 0.1, 0.2, 0.4, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0.5, 0.7, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0.8, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0.9$ でのソリトン衝突の様子を順に見る。図 2 ～ 5, 9 ～ 12 においては、左の図は実空間 (X, Z) でのループソリトンの相互作用で横軸は Z 、縦軸は X 、中央の図はソリトンの X -成分の相互作用で横軸は σ で縦軸は X -成分、そして右の図では Z -成分の相互作用で横軸は σ で縦軸は $\partial_\sigma Z$ である。また、上から 5 番目の図が $\tau = 0$ の様子である。

$v = 0.1$ での相互作用では速度が遅いため静止しているように見えるがゆっくりと互いに近づいている。ループはオーバーラップせず、個々の成分 X と $\partial_\sigma Z$ もオーバーラップしていない (図 2)。



$v = 0.2$ ではループはオーバーラップし始めているが、依然として個々の成分 X と $\partial_\sigma Z$ もオーバーラップしていない (図 3)。



$v = 0.4$ では小さいループが大きいループの中を回っているのがはっきり見えるが、それでもやはり X と $\partial_\sigma Z$ のピークは重なってはいない (次ページ, 図 4)。 (X, Z) の図の中程のいくつかにおいて縦軸方向に小さいループより高い二つの点が見える。これらが X のピークである。小さいループ内にピークがあるとき、ループはソリトンといえるが、ピークがループの外に出てしまうとソリトンではなくなる。このことは回っている小さなループがソリトンではなくソリトンとソリトンの間の谷間であることを意味している。

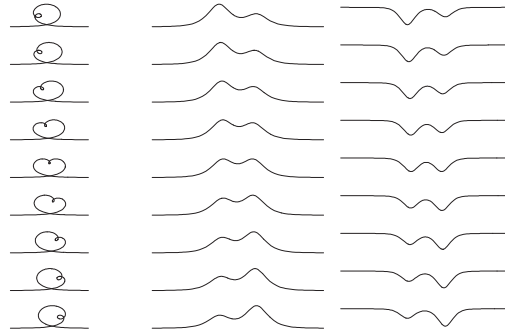


図4 $v = 0.4$ (X, Z) X $\partial_\sigma Z$

$v = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.44721$ では、 $\tau = 0$ でソリトン間の谷間はループの谷間はループではなくカスプ状になる (図 5)。

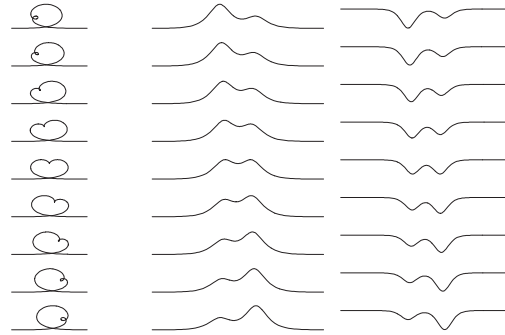


図5 $v = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (X, Z) X $\partial_\sigma Z$

この v の値の前後で、 $v = 0.44$ では谷間がループ、 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ではカスプ状、 0.45 では丸くなり、 v の値によって変化する (図 6)。すなわち、 $v = \frac{1}{\sqrt{5}}$ では $\tau = \sigma = 0$ でループの解消と再形成が起こり、これより大きな v では、 $\tau < 0$ と $\tau > 0$ のどこかでそれぞれループの解消と再形成が起こっている。 (X, Z) では折れているように見えるが、 X と $\partial_\sigma Z$ には解に特異性がある訳ではない。

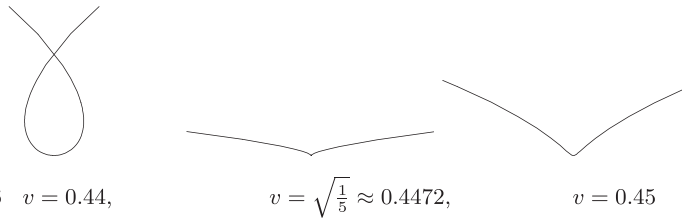


図6 $v = 0.44,$ $v = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472,$ $v = 0.45$

$v = 0.5$ では $\tau = 0$ でのソリトンの谷間はもはやループではなく、底の丸い谷底になっている (図 7)。

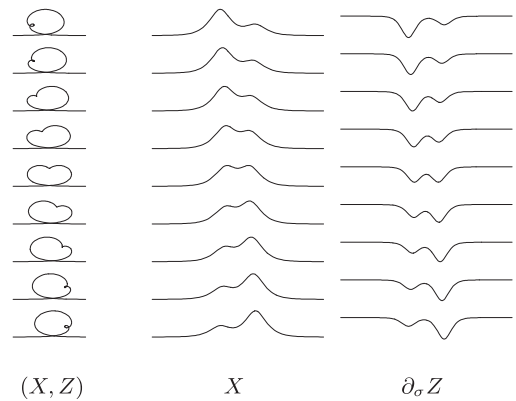


図 7 $v = 0.5$ (X, Z) X $\partial_\sigma Z$

$v = 0.7$ では (X, Z) の図の一番上の大きなループの左下に見える小さな突起状のものが大きなループに入射する小さなループソリトンで、最後の図の右下に見えている突起状のものが大きなループから出て行く小さいループソリトンであり、 X の図のソリトンの右にあるわずかなふくらみが小さいソリトンである (図 8)。 $\tau = 0$ では (X, Z) の図にループや $v = 0.5$ にあるようなくぼみのようなものは見当たらず、平坦になっているが、 X と $\partial_\sigma Z$ には小さなくぼみが見える。微かな違いがあるかもしれないが、これより大きな v ではループの形状の大きな変化は見えない。

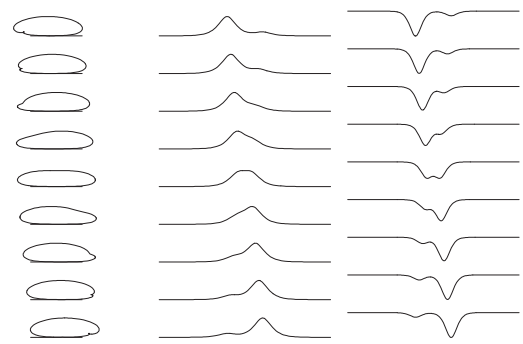


図 8 $v = 0.7$ (X, Z) X $\partial_\sigma Z$

$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707106$ では X のソリトンがオーバーラップするが、 $\partial_\sigma Z$ はまだオーバーラップしていない (次ページ, 図 9)。このとき $\tau = 0$ で X のピーク間のくぼみが消え、単一のピークの上端とループの上端は平坦になるが、 $\partial_\sigma Z$ の二つのピークの間には依然として小さなくぼみが残る。

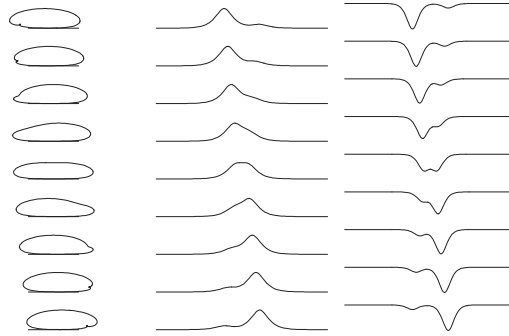


図9 $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (X, Z) X $\partial_\sigma Z$

$v = 0.8$ での相互作用でも $\partial_\sigma Z$ はオーバーラップしていないので、ループの形状は $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$ と大差はないが、 $\partial_\sigma Z$ のピークの間には谷間がある。また、大きなループの上端は上に凸になり丸みがある。

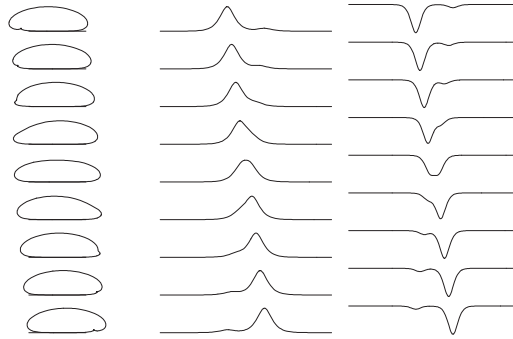


図10 $v = 0.8$ (X, Z) X $\partial_\sigma Z$

$v = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.81649$ では $\partial_\sigma Z$ のソリトン成分も二つのピークが一致し、ソリトンはオーバーラップする（次ページ，図 11）。このときにも $\tau = 0$ で $\partial_\sigma Z$ のピークの谷間が消失し、 $\partial_\sigma Z$ のピークの上端が平坦になる。この v の値で二つのソリトン成分がともにオーバーラップし、小さいループソリトンが大きなループソリトンに一時的に吸収されたともいえる。しかし、正と負の振幅の衝突の場合も小さいループが大きなループに吸収されたように見えるが（図 1），それとは異なり大きなループの振幅がエンハンスされることはない。

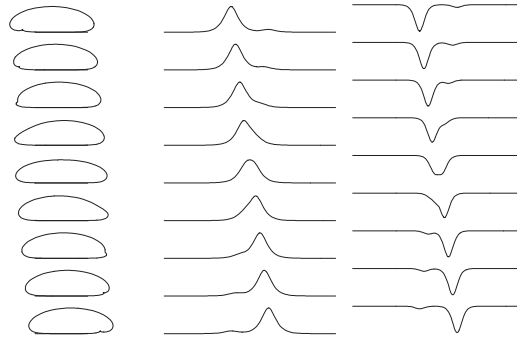


図 11 $v = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (X, Z) X $\partial_\sigma Z$

$v = 0.9$ での相互作用，全てのソリトン成分がオーバーラップしている（図 12）。ここでも大きなループのエンハンスメントは見られない。

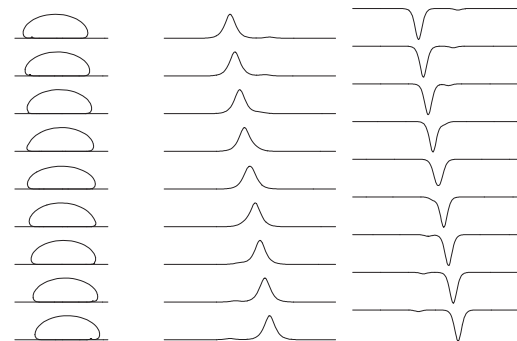


図 12 $v = 0.9$ (X, Z) X $\partial_\sigma Z$

6 Discussion

連立非分散方程式 (2) のループソリトンのピークの位置をソリトンの位置と見なして，二つの成分のピークを求める代数方程式，(8) と (9) を求めた。これらの方程式を用いて，近距離でのソリトン相互作用を調べた。 $x = 1$ ($\tau = 0$) で $|y| = 1$ ($\sigma = 0$)，が代数方程式の解であることにより， $\tau = 0$ での X と Z のピークに対する 2 次方程式 (13) とその解 (14) を得た。二つのソリトンが最接近する $x = 1$ ($\tau = 0$) で， X と Z のピークの位置は異なる。 X と Z のそれぞれの二つのソリトンがオーバーラップし，ソリトン間の谷間が消失する条件も異なる。これが $v \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ でのループの解消と再形成に関係すると考えられる。 $v \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ ではループの解消と再形成が起こる。特に， $v = \frac{1}{\sqrt{5}}$ では $\tau = \sigma = 0$ でループの解消と再形成が起き， $\frac{1}{\sqrt{5}} < v < \frac{1}{\sqrt{2}}$ では $\tau < 0$ でループが解

消し、ソリトンの成分がオーバーラップすることなく $\tau > 0$ でループが再形成された後、再びループに戻って伝播してゆく。いわゆる弾く相互作用と大きいループの中を小さいループが回る相互作用だけでなく、 $v \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ で小さいループが解消しても、少なくとも $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で X -成分がオーバーラップするまでは同じ弾く相互作用のままである。 $v \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ でオーバーラップが始まり、 $v \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$ で二成分系のソリトンとして完全にオーバーラップする。連立非分散方程式の正の振幅のループソリトン同士の衝突は従来考えられていたよりも複雑で、少なくとも三つの相互作用パターンが存在し、ループの様子を見ていただけでは判らない。

未解決の問題は、いくつもあるが、ループ形成の条件、特に $v = \frac{1}{\sqrt{5}}$ は何から決まるのかを明らかにすることである。正と負の振幅のソリトン衝突の取り扱い方も未解決である。また、WKI など他のループソリトン [3, 4, 5] でも同様のことが起こるのかを調べる必要がある。

参考文献

- [1] H. Kakuata and K. Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.
- [2] H. Kakuata and K. Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.
- [3] M. Wadati, K. Konno and Y. H. Ichikawa, J. Phys. Soc. Jpn **47** (1979) 1698.
- [4] V. O. Vakhnenko and E. J. Parkes, Nonlinearity **11** (1998) 1457.
- [5] Y. Ishimori, J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 2471.